



ESTATÍSTICA II - 2º Ano/Gestão do Desporto 2ª Prova Intercalar-2ª parte 14. 06. 18  
1 hora. (10 valores)

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1 a). (10)	2.(15)	3 a.(10)	4a.(15)	
1 b). (10)		3 b.(10)	4b.(10)	
		3 c. (10)	4c.(10)	T:

**Atenção: 1. A folha EXCEL no écran do computador tem dados sobre antropometria de uma amostra de 60 atletas em formação.**

**2. Devem apresentar na folha de exame a formalização e Justificação dos cálculos efectuados no EXCEL.**

**3. Devem fazer os cálculos no ficheiro EXCEL em folhas separadas para cada questão.**

1. Usando a informação contida na folha EXCEL.

a. Encontre o estimador e calcule a estimativa, pelo método dos momentos, para a proporção de esquerdinos (que usam preferencialmente a mão esquerda) entre os atletas em formação.

$X$  – número de esquerdinos na população  $\sim B(1, \theta) \Rightarrow E(X) = \theta$

$E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \theta = \bar{X}$ , pelo que o estimador pelo método dos momentos para  $\theta$  é

$\tilde{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}$

e a estimativa é  $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \bar{x} = 0.133(3)$

b. Estude o enviesamento e consistência do estimador encontrado na alínea a).

(2.5)  $E(\bar{X}) = \mu = \theta \Rightarrow$  o estimador é não enviesado  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu = \theta$  (1)

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$  (2)

(1) e (2) são condições necessárias e suficientes para  $\bar{X}$  ser um estimador consistente para  $\theta$ .

2. De uma população normal, extraíram-se várias amostras de dimensão  $n$ . Comente a afirmação “A variância da média da amostra subavalia a variância da população”.

A afirmação está correcta já que  $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} < Var(X) = \sigma^2$  para qualquer  $n > 1$  e o seu valor tende para zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

3. Com base na amostra, que consta do ficheiro EXCEL.

- a. Determine a dimensão da amostra necessária para garantir um erro de amostragem máximo de 5% na estimação por intervalos da proporção de esquadristas entre os atletas em formação com um nível de confiança de 90%.

$$\text{Variável fulcral} - \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$(1 - \alpha) = 0.9 \Leftrightarrow \alpha = 0.1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \text{normsinv}(0.05) = 1.645$$

$$\text{erro de amostragem} = 2 * z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 2 * 1.645 \sqrt{\frac{0.1333 * (1-0.1333)}{n}}$$

$$2 * z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} < 0.05 \Leftrightarrow 2 * 1.645 * \sqrt{\frac{0.1333 * (1 - 0.1333)}{n}} < 0.05$$

$$\Leftrightarrow n > 58$$

- b. Calcule a estimativa por intervalos de confiança para o parâmetro desejado com um grau de confiança de 90%.

Cálculo EXCEL

$$I. C._{\theta}^{90\%} = (0.0611, 0.2055)$$

- c. Alguém afirmou que “A verdadeira proporção de esquadristas pertence ao intervalo calculado na alínea b) com 90% de probabilidade”. Comente a afirmação.

A afirmação é falsa pois o parâmetro  $\theta$  pode pertencer ou não pertencer ao intervalo calculado.  $P(\theta \in I. C._{\theta}^{90\%}) = 0$  ou  $P(\theta \in I. C._{\theta}^{90\%}) = 1$ . Se se recolher um número elevado de amostras desta população e para cada uma delas se calcular o  $I. C._{\theta}^{90\%}$  então  $\theta \in I. C._{\theta}^{90\%}$  em 90% desses intervalos.

4. Use a informação da folha EXCEL

- a. Calcule a estimativa por intervalos de confiança para a variância do índice de massa corporal dos atletas em formação com um grau de confiança de 95%.

$$\text{Variável Fulcral} - \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}; s'^2 = 9.3115 \Rightarrow s' = 3.0515$$

$$\text{Cálculo EXCEL} \quad I. C._{\sigma^2}^{90\%} = (6.6903, 13.8518)$$

- b. Se pretendesse reduzir a amplitude do intervalo de confiança calculado como procederia? [**Não efectue cálculos**]

Reduz-se a amplitude do intervalo de confiança, reduzindo o grau de confiança mantendo constante a dimensão da amostra ou aumentando a dimensão da amostra, mantendo constante o grau de confiança ou ambos.

- c. Considere o seguinte intervalo de confiança para a média do índice de massa corporal dos atletas em formação (19.06, 20.08). Qual o grau de confiança associado?

$$\text{Variável fulcral} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s'}{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

$$\text{Amplitude do intervalo de confiança} = 2 * t_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{s'}{n}} = 20.08 - 19.06 = 1.02$$

$$2 * t_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{s'}{n}} = 2 * t_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{3.0515}{60}} = 1.02 \Leftrightarrow t_{\alpha/2} = \frac{1.02}{2 * \sqrt{\frac{3.0515}{60}}}$$

$$\Leftrightarrow t_{\alpha/2} = 1.2946 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = P(T_{(59)} > 1.2946) = 0,1 \Rightarrow \alpha = 0.2 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.8$$